

# ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας,**

Ημ/νία: 23 Μαΐου 2012

**Απαντήσεις Θεμάτων**

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 31

**A2.** Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 148

**A3.** Θεωρία Σχολικού βιβλίου σελ. 96

**A4.** α) Λ      β) Σ      γ) Λ      δ) Σ      ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

**B1.** Επειδή η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν, προκύπτει ότι  $\delta = 25$ .

**B2.** Το μέγεθος του δείγματος ν ισούται με  $\sum_{i=1}^4 v_i = 7a + 4$

Από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % έχουμε ότι

$$F_2 = 0,5 \Leftrightarrow \frac{N_2}{v} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{4a - 2}{7a + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8$$

Ο πίνακας συχνοτήτων συμπληρώνεται με βάση το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων ( $F_i\%$ ) και με χρήση των τύπων:

$$f_i \% = 100 \frac{v_i}{v}, \quad \text{για } i = 1, \dots, 4$$

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad \text{για } i = 1, \dots, 4$$

$$F_i \% = f_1 \% + f_2 \% + \dots + f_i \%, \quad \text{για } i = 1, \dots, 4$$

Χρόνοι (λεπτά)	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
[5, 15)	10	12	20	12	20	120
[15, 25)	20	18	30	30	50	360
[25, 35)	30	24	40	54	90	720
[35, 45)	40	6	10	60	100	240
Σύνολο	60	100				1440

**B3.** Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i = \frac{1}{60} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = 24$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{60} \sum_{i=1}^4 (x_i - 24)^2 \cdot v_i = 84$$

Άρα:  $s = \sqrt{84} = 9,17$

**B4.** Έστω για το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν χρόνο στο διάστημα [37,45).

Επειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση έχουμε:

$$\frac{45 - 37}{45 - 35} = \frac{y}{10} \Leftrightarrow y = 8$$

Άρα, το 8% των μαθητών χρειάστηκε τουλάχιστον 37 λεπτά για να λύσει το μαθηματικό πρόβλημα.

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα :

Γ: ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά με:  $P(\Gamma) = \frac{3v}{v^2+1}$

I: ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά με:  $P(I) = \frac{v+2}{v^2+1}$

Δίνεται ότι:  $P(\Gamma \cap I) = \frac{v+1}{v^2+1}$

**Γ1.** Είναι:

$$\begin{aligned}
 P(\Gamma \cup I) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x^2 + x)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x - 1)}{x(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{-4}{-4} = 1
 \end{aligned}$$

και άρα το ενδεχόμενο  $\Gamma \cup I$  είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

**Γ2.** Σύμφωνα με τον προσθετικό νόμο είναι:

$$\begin{aligned}
 P(\Gamma \cup I) &= P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2 + 1} + \frac{\nu + 2}{\nu^2 + 1} - \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \\
 \Leftrightarrow \nu^2 + 1 &= 3\nu + \nu + 2 - \nu - 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu - 3) = 0 \stackrel{\nu \neq 0}{\Leftrightarrow} \nu = 3
 \end{aligned}$$

**Γ3.** Ισχύει:

$$\begin{aligned}
 P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) &= P(\Gamma - I) + P(I - \Gamma) \text{ (Τα ενδεχόμενα } \Gamma - I, I - \Gamma \text{ είναι ασυμβίβαστα)} \\
 &= P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(\Gamma \cap I) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I)
 \end{aligned}$$

Για  $\nu = 3$  είναι:  $P(\Gamma) = \frac{9}{10}, P(I) = \frac{5}{10}, P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10}$

και τελικά:  $P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{6}{10}$

**Γ4.** Είναι:  $P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10}$

Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε ότι:

$$P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{32}{N(\Omega)}$$

και άρα:

$$\frac{32}{N(\Omega)} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 4 N(\Omega) = 320 \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**  $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$  με  $A_f = (0, +\infty)$  και  $f(1) = 1$

Η  $f$  είναι παραγωγήσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πράξη παραγωγισμών με:

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2}, \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0 \text{ για κάθε } x \neq e \text{ και } x > 0, \quad f'(1) = -1$$

Οπότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**Δ2.** Για το εμβαδό του ορθογωνίου έχουμε:

$$E(x) = x \cdot f(x), \text{ με } x > 0 \text{ και } f(x) > 0$$

$$E(x) = 1 + \ln^2 x$$

$$E'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \text{ για κάθε } x > 0$$

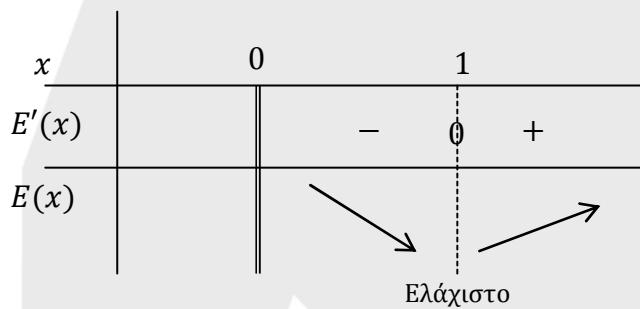
Λύνουμε την εξίσωση:

$$E'(x) = 0, \quad \text{με } x > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Επίσης: } E'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Επομένως, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:



Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστο όταν  $x = 1$  οπότε το ορθογώνιο  $OKML$  με κορυφές  $O(0,0)$ ,  $K(1,0)$ ,  $M(1,1)$ ,  $L(0,1)$  είναι τετράγωνο.

**Δ3.** Η εφαπτομένη ( $\eta$ ) της  $C_f$  στο σημείο της  $\Sigma(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην ευθεία

$$(\varepsilon) : \psi = \lambda x + \beta \quad \text{με} \quad \beta \neq 10$$

$$\text{Άρα: } \lambda_\eta = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(1) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Εφόσον  $(\varepsilon) : \psi = -x + \beta$  οι παρατηρήσεις έχουν τη μορφή:

$$\psi_i = -x_i + \beta \text{ για } i = 1, \dots, 10$$

Οπότε με βάση την εφαρμογή 3 (σελ 99) του σχολικού βιβλίου προκύπτει:

$$\bar{\psi} = -\bar{x} + \beta = -10 + \beta$$

$$\text{και } S_\psi = |-1| \cdot S_x = S_x = 2.$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει:  $CV_\psi \leq 10\%$

$$CV_\psi \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30$$

**Δ4.** Επειδή  $A \subseteq A \cup B$  είναι:  $P(A) \leq P(A \cup B)$  με  $P(A), P(A \cup B) \in (0,1] \subseteq (0, +\infty)$

Εφόσον η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει:

$$f(P(A)) \geq f(P(A \cup B)), \quad (1)$$

Ομοίως, επειδή:  $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$  είναι:  $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

με  $P(A \cap B), P(A \cup B) \in (0,1] \subseteq (0, +\infty)$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει:

$$f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B)), \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$